

Versuch M10 - Torsionsmodul		
Name:	Mitarbeiter:	
Gruppennummer:	lfd. Nummer:	Datum:

1. Aufgabenstellung

1.1. Versuchsziel

Bestimmen Sie das Torsionsmodul eines Drahtes mittels Torsionsschwingungen.

Verschaffen Sie sich Kenntnisse zu folgenden Schwerpunkten des Versuches:

- HOOKSches Gesetz
- mechanische Spannungen
- Modellvorstellungen zur Torsion
- STEINERSche Satz

1.2. Messungen

1.2.1. Bestimmen Sie folgende Größen durch Messungen oder Berechnungen:

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • Drahtlänge l • Zusatzmasse beider Zylinder m_Z • Abstand a der Zusatzmassen von der Drehachse | <ul style="list-style-type: none"> • Drahtradius R • Zylinderradius R_Z • Schwingungsdauern T_1 des Drehpendels ohne Zusatzmassen bzw. T_2 mit Zusatzmassen |
|--|--|

1.3. Auswertungen

1.3.1. Berechnen Sie aus Ihren Messwerten nach der experimentellen Methode unter Benutzung der Zusatzmassen das Trägheitsmoment J_0 des Drehpendels.

1.3.2. Berechnen Sie das Torsionsmodul G und das Direktionsmoment D des Drahtes.

1.4. Zusatzaufgabe

Bestimmen Sie für die experimentell gefundenen Daten den Mittelwert des Torsionsmoduls \bar{G} und den Größtfehler ΔG , wenn folgende Messwerte gewonnen wurden:

$$\begin{array}{lll}
 l = (80,0 \pm 0,1) \text{ cm} & R = (0,015 \pm 0,001) \text{ cm} & R_Z = (0,50 \pm 0,01) \text{ cm} \\
 a = (11,0 \pm 0,2) \text{ cm} & m_Z = (40 \pm 1) \text{ g} & T_1 = (20,0 \pm 0,2) \text{ s} \\
 T_2 = (25,0 \pm 0,2) \text{ s} & &
 \end{array}$$

Verwenden Sie $G = f(l, R, R_Z, a, m, T_1, T_2)$ nach Gl. (13) und die Beziehung für den Größtfehler

$$\Delta G = \sum_i \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot |\Delta x_i| \quad \text{mit} \quad x_1 = l; \quad x_2 = R; \quad x_3 = R_Z; \dots$$

2. Grundlagen

Werden an einem Körper hinreichend kleine elastische Form- oder Volumenänderungen vorgenommen, so gilt das **Hookesche Gesetz**. Wirken die deformierenden Kräfte F tangential zur Angriffsfläche A , so bewirkt diese eine mechanische Tangential-, Scher- oder Schubspannung $\tau = F/A$. Das Resultat ist eine Gestaltänderung, messbar durch einen Scherwinkel φ . Das Hookesche Gesetz nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\tau = \frac{F}{A} = G \cdot \varphi \quad . \quad (1)$$

Die materialabhängige Größe G heißt Torsions-, Scher- oder Schubmodul und hat die Maßeinheit Nm^{-2} . Der Scherwinkel φ wird im Bogenmaß angegeben und hat folglich keine Maßeinheit.

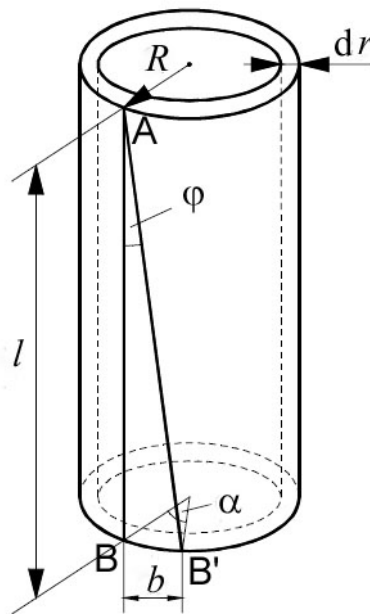


Abb. 1 Scherung eines Hohlzylinders.

Klemmen wir das obere Ende eines Drahtes fest ein und verdrehen das untere Ende in waagerechter Ebene, so wird der Draht um seine Längsachse verdrillt oder tordiert, d.h. die einzelnen Drahtquerschnitte werden gegeneinander verdreht. Den zylindrischen Draht vom Radius R und der Länge l denken wir uns dabei in einzelne konzentrische Hohlzylinder mit einer geringen Wandstärke dr zerlegt.

In Abb. 1 ist einer dieser Hohlzylinder mit dem Radius r ($r < R$) dargestellt. Längs des unteren Querschnittes des Hohlzylinders wirken am Kraftarm r in tangentialer Richtung die verdrehenden Kräfte. Die Summe ihrer Drehmomente ergibt das Gesamtdrehmoment, welches Ursache der Torsion ist. Durch sie wird eine zur Zylinderachse parallele Mantellinie $AB = l$ infolge Scherung um den Winkel φ in die Linie AB' überführt bzw. ihr unteres Ende um den Bogen $BB' = b$ verschoben. Dieser kleine Bogen b gehört sowohl zum Winkel α als auch (näherungsweise) zum Winkel φ , d.h. es gilt

$$b = \varphi \cdot l = \alpha \cdot r \quad \text{bzw.} \quad \varphi = \frac{r}{l} \cdot \alpha \quad . \quad (2)$$

Auf die untere, differentiell kleine Kreisringfläche $dA = 2\pi r dr$ des Hohlzylinders wirke die Kraft dF . Dann gilt nach dem Hookeschen Gesetz Gl. (1) :

$$dF = G \cdot \varphi \cdot dA = G \cdot \frac{r}{l} \cdot \alpha \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr \quad . \quad (3)$$

Das durch das Krafftelement dF am Hebelarm r zur Torsion des Drahtes beitragende Drehmoment dM beträgt also:

$$dM = r \cdot dF = 2\pi \cdot \frac{G \cdot \alpha}{l} \cdot r^3 \cdot dr \quad (4)$$

Das auf die gesamte Endfläche des Drahtes vom Radius R ausgeübte Drehmoment M erhalten wir durch Summation über die Drehmomentbeiträge dM aller gedachten Hohlzylinder. Mathematisch ausgedrückt erfordert dies eine Integration des Ausdruckes Gl. (4) zwischen den Integrationsgrenzen $r = 0$ und $r = R$. Für das Drehmoment, das den Draht um den Winkel α tordiert, ergibt sich schließlich:

$$M = \int_0^R dM = 2\pi \cdot \frac{G \cdot \alpha}{l} \int r^3 dr = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{G \cdot \alpha}{l} \cdot R^4 \quad . \quad (5)$$

2.1. Bestimmung des Torsionsmoduls

2.1.1. Dynamisches Verfahren

Das Drehmoment, welches den Drehwinkel $\alpha = 1$ (Bogenmaß, entspricht ca. 57° im Gradmaß) hervorruft, hat nach Gl. (5) den Wert:

$$D = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{G}{l} \cdot R^4 \quad . \quad (6)$$

Diesem äußeren Drehmoment wirkt im Gleichgewicht ein gleich großes Drehmoment infolge der Elastizität des Drahtes entgegen. Dieses Drehmoment heißt **Rückstellmoment oder Direktionsmoment**.

Wir befestigen am unteren Ende des Drahtes eine Scheibe oder einen Stab, so dass die ganze Anordnung ein Trägheitsmoment J bezüglich ihrer Drehachse erhält. Beim Verdrillen der Anordnung um die Drehachse entsteht infolge der elastischen Deformation des Drahtes ein dem Torsionswinkel α proportionales Drehmoment, das zu harmonischen Drehschwingungen um die Ruhelage führt. Diese Drehschwingung wird charakterisiert durch eine experimentell leicht messbare Schwingungsdauer T :

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D}} \quad . \quad (7)$$

Durch Quadrierung der Gl. (7) und Einsetzen von (6) ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für den Torsionsmodul G :

$$G = \frac{8\pi \cdot l \cdot J}{R^4 \cdot T^2} \quad . \quad (8)$$

Der Torsionsmodul G lässt sich also dynamisch bestimmen, d.h. aus dem Bewegungsablauf der Drehschwingung, indem man neben den Drahtabmessungen (Radius R und Länge l) das Trägheitsmoment J des Drehpendels und seine Schwingungsdauer T ermittelt. Dies erfordert die experimentelle Bestimmung des Trägheitsmomentes mit Hilfe von Zusatzmassen.

2.1.2. Bestimmung des Trägheitsmomentes mit Hilfe von Zusatzmassen

Hat der Pendelkörper eine geometrisch einfache Gestalt, lässt sich das Trägheitsmoment J berechnen. Für beliebig gestaltete Körper wird es experimentell bestimmt, indem man am Pendelkörper Zusatzmassen mit bekanntem Trägheitsmoment bezüglich der aktuellen Drehachse befestigt. Dann addieren sich die Trägheitsmomente.

Für die Schwingungsdauer T_1 und T_2 mit und ohne Zusatzmassen gelten die Beziehungen:

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_0}{D}} \quad \text{und} \quad T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_0 + J_Z}{D}} \quad (9a,b)$$

(J_0 - Trägheitsmoment ohne Zusatzmasse, $J_0 + J_Z$ - Trägheitsmoment mit Zusatzmasse).

Wenn J_Z bekannt ist oder berechnet werden kann, ergibt sich durch Auflösung der Gl. (9a,b):

$$J_0 = J_Z \cdot \frac{T_1^2}{T_2^2 - T_1^2} \quad (10)$$

Häufig benutzt man als Zusatzmasse einen Kreiszyylinder oder eine Kreisscheibe (sehr flacher Zylinder). Wenn dieser Zylinder den Radius R_Z hat und die Drehachse mit der Zylinderachse zusammenfällt, gilt für dessen Trägheitsmoment:

$$J_{Z0} = \frac{1}{2} \cdot m_Z \cdot R_Z^2 \quad (11)$$

Wird die Zusatzmasse m_Z außerhalb der Drehachse angebracht, ist der **Steinersche Satz** anzuwenden. Dabei ist zu beachten, dass die Drehachse des Pendels und die Symmetrieachse des Zylinders zueinander parallel verlaufen. Im Versuch benutzen wir als Zusatzmasse zwei gleiche Metallzylinder mit der Gesamtmasse m , die jeweils im Abstand a von der Drehachse des Systems symmetrisch auf das Drehpendel aufgesetzt werden (s. Abb. 2).

$$J_Z = J_{Z0} + m \cdot a^2 \quad (12)$$

($m = m_{Z1} + m_{Z2}$ - Gesamtmasse beider Zylinder, J_{Z0} - Trägheitsmoment bezüglich der Zylinderachse, J_Z - Trägheitsmoment bezüglich der Drahtachse).

Damit bestimmt sich der Torsionsmodul bei Anwendung der hier beschriebenen Methode zu

$$G = \frac{8\pi \cdot l \cdot J_0}{R^4 \cdot T_1^2} = \frac{8\pi \cdot l}{R^4 \cdot (T_2^2 - T_1^2)} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot R_Z^2 + m \cdot a^2 \right) \quad (13)$$

Ist G bekannt, so kann auch das Direktionsmoment D nach Gl. (6) oder (7) errechnet werden.

3. Experiment

3.1. Geräte und Materialien

- Torsionspendel
- Stoppuhr
- Mikrometerschraube
- Lineal

3.2. Versuchsaufbau

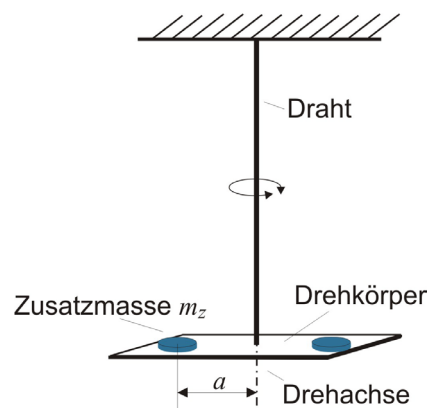


Abb 2 Anordnung zur Bestimmung des Torsionsmoduls.

4. Literatur

Lehrbücher der Experimentalphysik,
Walcher, Praktikum der Physik, Teubner-Verlag.

5. Anhang

Der **Steinersche Satz** (in zwei äquivalenten Formulierungen)

1. Wird ein Körper mit einem auf eine Drehachse durch seinen Schwerpunkt bezogenen Trägheitsmoment J_0 um eine andere, im Abstand a befindliche parallele Achse gedreht, so hat er bezüglich dieser Achse ein vergrößertes Trägheitsmoment $J = J_0 + m a^2$.
2. Bezeichnet J_0 das Trägheitsmoment eines Körpers um eine durch seinen Schwerpunkt gehende Achse und J das Trägheitsmoment desselben Körpers um eine zu dieser Schwerpunktsachse parallele Achse, so gilt $J = J_0 + m a^2$, wenn m die Gesamtmasse und a den Abstand beider Achsen bedeuten..